

9.1.14 Kombinace s opakováním

Předpoklady: 9107, 9108, 9112, 9113

Pedagogická poznámka: Časová náročnost této hodiny je podobná hodině předchozí.

Netradiční začátek. Nemáme žádné příklady, ale rovnou definici.

Definice kombinace bez opakování

k -členná kombinace z n prvků je **neuspořádaná** k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Př. 1: Sestav definici k -členné kombinace s opakováním z n prvků.

k -členná kombinace s opakováním z n prvků je **neuspořádaná** k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát.

Příkladem vytváření takových kombinací je například známý příklad na výpočet počtu částek, které je možné zaplatit pomocí tří jedno, dvou a pětikorunových mincí.

Př. 2: Vypiš všechny částky, které je možné zaplatit třemi mincemi, pokud máš k dispozici tři jednokorunové, tři dvoukorunové a tři pětikorunové mince.

Budeme vypisovat jednotlivé trojice mincí a jejich celkovou hodnotu:

$1,1,1 \Rightarrow 3$ $1,1,2 \Rightarrow 4$ $1,1,5 \Rightarrow 7$ $1,2,2 \Rightarrow 5$ $1,2,5 \Rightarrow 8$
 $1,5,5 \Rightarrow 11$ $2,2,2 \Rightarrow 6$ $2,2,5 \Rightarrow 9$ $2,5,5 \Rightarrow 12$ $5,5,5 \Rightarrow 15$
 $\Rightarrow$ celkem 10 možných částek $\{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 15\}$.

V předchozím příkladu jsme vytvářeli skupiny, ve kterých nezáleželo na pořadí (šlo pouze o to, že ve skupině máme dvě koruny a jednu dvoukorunu, ne o to, kterou minci jsme vybrali jako první), jednotlivé prvky se mohly opakovat $\Rightarrow$ **vytvářeli jsme tříčlenné kombinace ze tří prvků s opakováním.**

Náš přístup nebyl příliš kombinatorický. Všechny možnosti jsme nejdříve vypsali a pak je spočítali (dosud jsme to vždycky dělali obráceně). Takový postup nepůjde aplikovat u vícečlenných kombinací z většího počtu prvků.

$\Rightarrow$ Musíme vymyslet postup, který umožňuje určit počet kombinací s opakováním podobně, jako jsme to udělali v jiných případech.

Trik: Kombinace s opakováním nahradíme permutacemi s opakováním.

Tři mince, ze kterých sestavujeme naše kombinace, budeme brát ze tří přihrádek, podle toho, ze které přihrádky minci vezmeme, víme, zda to je 1, 2 nebo 5 koruna. Rozdělení můžeme znázorňovat pomocí tří koleček $\bigcirc$ (mince) a dvou přepážek $\parallel$, které rozdělí mince do

tří přihrádek, konkrétně například takto: $1,1,5 \Leftrightarrow \underbrace{\bigcirc \bigcirc}_1 \parallel \underbrace{\bigcirc}_2 \parallel \underbrace{\bigcirc}_5$.

Př. 3: Namodeluj pomocí tří koleček a dvou přepážek zbývající kombinace vytvořené v příkladu 2.

$$\begin{array}{lll}
 1,1,1 \Leftrightarrow \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_1 \parallel \underbrace{}_2 \parallel \underbrace{}_5 & 1,1,2 \Leftrightarrow \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_1 \parallel \underbrace{\bigcirc}_2 \parallel \underbrace{}_5 & 1,1,5 \Leftrightarrow \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_1 \parallel \underbrace{}_2 \parallel \underbrace{\bigcirc}_5 \\
 1,2,2 \Leftrightarrow \underbrace{\bigcirc}_1 \parallel \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_2 \parallel \underbrace{}_5 & 1,2,5 \Leftrightarrow \underbrace{\bigcirc}_1 \parallel \underbrace{\bigcirc}_2 \parallel \underbrace{\bigcirc}_5 & 1,5,5 \Leftrightarrow \underbrace{\bigcirc}_1 \parallel \underbrace{}_2 \parallel \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_5 \\
 2,2,2 \Leftrightarrow \underbrace{}_1 \parallel \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_2 \parallel \underbrace{}_5 & 2,2,5 \Leftrightarrow \underbrace{}_1 \parallel \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_2 \parallel \underbrace{\bigcirc}_5 & 2,5,5 \Leftrightarrow \underbrace{}_1 \parallel \underbrace{\bigcirc}_2 \parallel \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_5 \\
 5,5,5 \Leftrightarrow \underbrace{}_1 \parallel \underbrace{}_2 \parallel \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_5
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Každé kombinaci z příkladu 2 odpovídá jeden obrázek s mincemi a přihrádkami a naopak $\Rightarrow$ obrázků i kombinací je stejně.

Kolik obrázků můžeme sestavit? Jde o uspořádané pětice ze tří koleček a dvou přepážek $\Rightarrow$ permutace s opakováním: $P'(3;2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 2 = 10$.

Výsledek odpovídá počtu kombinací, které jsme vytvořili v příkladu 2.

Př. 4: Urči počet pětičlenných kombinací s opakováním ze tří prvků, pomocí předchozího modelu s kolečky a přepážkami.

- Pětičlenné kombinace $\Rightarrow$ pět koleček,
- ze tří prvků $\Rightarrow$ tři přihrádky $\Rightarrow$ dvě přepážky,

$\Rightarrow$ vytváříme permutace s opakováním z pěti koleček a dvou přepážek $\Rightarrow \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ možností.

Poznámka: Je dobré si uvědomit, že pětičlenné kombinace ze tří prvků bez opakování není možné sestavit.

Pedagogická poznámka: Občas se objeví někdo, kdo si neuvědomí, že sestavujeme kombinace s opakováním a právě kvůli faktu z předchozí poznámky považuje předchozí příklad za nesmyslný.
Nejčastější chyby:
prohození významu k a n ,
nerozlišování mezi přihrádkami a přepážkami a tudíž dosazování větší hodnoty do výsledného zlomku.

Př. 5: Urči počet tříčlenných kombinací s opakováním z pěti prvků, pomocí modelu s kolečky a přepážkami.

- Tříčlenné kombinace $\Rightarrow$ tři kolečka,
- z pěti prvků $\Rightarrow$ pět přihrádek $\Rightarrow$ čtyři přepážky,

$\Rightarrow$ vytváříme permutace s opakováním ze tří koleček a čtyř přepážek $\Rightarrow \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ možností.

Postřeh: Je nutné dávat pozor na čísla n a k , protože při jejich záměně můžeme získat špatný výsledek.

Př. 6: Urči počet k -členných kombinací s opakováním z n prvků (číslu $K'_k(n)$).

Postupujeme stejně jako s konkrétními čísly:

- k -členné kombinace $\Rightarrow k$ koleček,
- z n prvků $\Rightarrow n$ přihrádek $\Rightarrow n-1$ přepážek,

$\Rightarrow$ vytváříme permutace s opakováním z k koleček a $n-1$ přepážek $\Rightarrow \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$ možností.

Platí: $K'_k(n) = P'(k; n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$

Všechny výsledky připomínají kombinační čísla. Bylo by hezké mít počet kombinací s opakováním napsaný ve formě kombinačního čísla:

$$K'_k(n) = P'(k; n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot [(n+k-1)-k]!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Počet $K'_k(n)$ všech k -členných kombinací s opakováním z n prvků je

$$K'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Pedagogická poznámka: Existuje značné procento studentů, kterým přijde přechod na kombinační číslo zbytečný. Nenutím je.

Př. 7: Kolika způsoby je možné nakoupit 15 oplatků, pokud mají v obchodě k dispozici pět druhů oplatků, všechny v dostatečném množství (alespoň 15 kusů)?

Kupujeme 15 oplatků, nehraje roli, který jsme vybrali jako první, zajímá nás pouze to, kolik oplatků kterého druhu budeme mít $\Rightarrow$ sestavujeme neuspořádanou 15-tici z pěti prvků s opakováním $\Rightarrow$ jde o kombinaci s opakováním.

Vybíráme 15 prvků z 5 $\Rightarrow K'_{15}(5) = \binom{5+15-1}{15} = \binom{19}{15} = 3876$ možností.

Př. 8: Urči, kolika způsoby je možné rozdat mariášové karty z plného balíčku:

- a) pro 1 hráče na prší (při hře rozlišujeme jak barvu, tak hodnotu),
- b) pro 1 hráče na sedmu (při hře rozlišujeme pouze hodnoty karet, jejich barva nehraje roli).

a) pro 1 hráče na prší (při hře rozlišujeme jak barvu, tak hodnotu)

Vybíráme 4 karty ze 32 (žádné dvě karty nejsou stejné $\Rightarrow$ při výběru se nemůžeme opakovat), nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ sestavujeme čtyřčlenné kombinace ze 32 bez opakování $\Rightarrow$

$$K_4(32) = \binom{32}{4} = 35\,960 \text{ možností.}$$

b) pro 1 hráče na sedmu (při hře rozlišujeme pouze hodnoty karet, jejich barva nehraje roli) Vybíráme z osmi různých karet (osm různých hodnot) a každou hodnotu máme k dispozici čtyřikrát (při výběru se můžeme opakovat), nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ sestavujeme čtyřčlenné

$$\text{kombinace z 8 s opakováním} \Rightarrow K'_4(8) = \binom{11}{4} = 330 \text{ možností.}$$

Pedagogická poznámka: Většina studentů se nachytá a neuvědomí si, že v bodě a) se jedná o kombinace bez opakování, protože není možné rozdat například dvě zelená esa.

Př. 9: Kolik čtveřic mohou dát počty ok na čtyřech nerozlišitelných, naráz hozených hracích kostkách na člověče nezlob se?

Kostky jsou nerozlišitelné a házíme je naráz $\Rightarrow$ nemůžeme říct, která z kostek je první, nerozlišujeme, kolik na které kostce padlo, pouze kolikrát máme 1, kolikrát 2 ... $\Rightarrow$ vytváříme neuspořádané čtveřice ze šesti čísel, která se mohou opakovat $\Rightarrow$ sestavujeme

$$\text{čtyřčlenné kombinace z 6 s opakováním} \Rightarrow K'_4(6) = \binom{9}{4} = 126 \text{ možností.}$$

Př. 10: V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky. Kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné. Urči, kolika způsoby je možné vybrat pět kuliček (bez rozlišení pořadí, ve kterém byly vytaheny) jestliže v sáčku je:

- alespoň pět kuliček od každé barvy,
- pět červených, čtyři modré a čtyři zelené kuličky,
- pět červených, pět modrých a tři zelené kuličky.

a) alespoň pět kuliček od každé barvy

Nerozlišujeme, v jakém pořadí jsme táhli, pouze kolik máme červených, modrých a zelených kuliček $\Rightarrow$ vytváříme neuspořádané pětičky ze tří barev $\Rightarrow$ sestavujeme pětičlenné kombinace

$$\text{ze tří s opakováním} \Rightarrow K'_5(3) = \binom{7}{5} = 21 \text{ možností.}$$

b) pět červených, čtyři modré a čtyři zelené

Nemůžeme vytáhnout všechny kombinace jako v předchozím bodě (pět modrých a pět zelených nemáme k dispozici) $\Rightarrow$ musíme tyto dvě kombinace odečíst $\Rightarrow$

$$K'_5(3) - 2 = \binom{7}{5} - 2 = 19 \text{ možností.}$$

c) pět červených, pět modrých a tři zelené

Opět nemůžeme vytáhnout všechny kombinace $\Rightarrow$ spočteme všechny možnosti a pak odečteme počty těch, které nejdou vytáhnout:

- pět zelených $\Rightarrow$ 1 možnost,
- čtyři zelené a jednu další barvu $\Rightarrow$ 2 možnosti (jak si vybrat zbývající barvu),

$$\Rightarrow \text{celkem } K'_5(3) - 3 = \binom{7}{5} - 3 = 18 \text{ možností.}$$

Př. 11: Urči, kolika způsoby je možné rozdat mariášové karty z plného balíčku:

- a) pro 4 hráče na prší (při hře rozlišujeme jak barvu, tak hodnotu),
- b) pro 4 hráče na sedmu (při hře rozlišujeme pouze hodnoty karet, jejich barva nehraje roli).

a) pro 4 hráče na prší (při hře rozlišujeme jak barvu, tak hodnotu)

Vybíráme postupně podobně jako v příkladu 7 a):

1. hráč: 4 karty z 32 $\Rightarrow K_4(32) = \binom{32}{4}$ možností,

2. hráč: 4 karty z 28 $\Rightarrow K_4(28) = \binom{28}{4}$ možností,

3. hráč: 4 karty z 24 $\Rightarrow K_4(24) = \binom{24}{4}$ možností,

4. hráč: 4 karty z 20 $\Rightarrow K_4(20) = \binom{20}{4}$ možností,

možnosti mezi sebou násobíme $\Rightarrow$ celkem $\binom{32}{4} \cdot \binom{28}{4} \cdot \binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \doteq 3,79 \cdot 10^{16}$ možností.

b) pro 4 hráče na sedmu (při hře rozlišujeme pouze hodnoty karet, jejich barva nehraje roli)

Řešení tohoto příkladu autor učebnice nezná. Na rozdíl od bodu a) nemůžeme při vybírání karet pro druhé hráče postupovat podobně jako v bodě a), protože nevíme, jak dopadlo rozdávání pro prvního hráče (všechny čtyři rozdané karty mohly mít stejnou hodnotu $\Rightarrow$ pak už vybíráme pouze ze sedmi hodnot atd.).

Př. 12: Petáková:

strana 148/cvičení 74

strana 148/cvičení 75

Shrnutí: Počty kombinací s opakováním můžeme určovat pomocí permutací s opakováním ze dvou prvků (počet vybíraných předmětů a počet přihrádek na rozlišení jejich druhů).